

Принципы организации непрерывности в дискретном геометризованном пространстве

А.В. Толок¹, Н.Б. Толок²

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

¹ ORCID: 0000-0002-7257-9029, tolok_61@mail.ru

² ORCID: 0000-0002-5511-4852, nat_tolok@mail.ru

Аннотация

В работе рассматривается принцип аналитического перехода к локальной функции в точках на области функции неявного вида, задающей геометрический объект. При этом обеспечивается переход к частным производным для получения общего вида неявной локальной функции, описывающей локальную геометрию для любой отдельной точки области объекта. По аналогии с R-функциональным моделированием приводится математический аппарат операций объединения/пересечения локальных геометрических характеристик локальной функции в отдельно взятой точке для построения дискретной области сложного геометрического объекта. Приводится пример пересечения двух функций на задаваемой области аргументов с получением дискретно геометризованной трёхмерной области для описания цилиндра. Предложенная работа является продолжением развития метода функционально-воксельного моделирования и предлагает аналитическую структуру дискретно-непрерывного описания сложных геометрических объектов взамен на средства линейной аппроксимации, применяемой на данный момент в указанном методе.

Ключевые слова: Область задания функции, функционально-воксельный метод (FV-метод), частные производные, локальные геометрические характеристики, локальная функция, R-функциональное моделирование, дискретно-непрерывная область.

Постановка задачи

Идея аналитического моделирования геометрических объектов неявными функциями (как обратная задача аналитической геометрии) существует давно [1-5] и имеет ряд существенных преимуществ перед поверхностными моделями, описываемыми параметрическим способом для выражения координат граничных точек. В первую очередь, геометрический объект представлен областью значений с нулевой границей, что добавляет применимость такой области в инженерных расчётах. Во вторую можно отметить отсутствие границ задаваемой размерности такой области. Однако, аналитическая функция, записываемая сложным выражением, требует дополнительной упрощённой дискретизации на заданной области для дальнейшего применения в компьютерных технологиях. В первую очередь, компьютерная информация дискретна и требует обеспечения перехода от функциональной непрерывности к непрерывности дискретной. Непрерывность дискретная должна сохранять свойства и идентичность с функциональной непрерывностью, т.е. так же представляться локальной функцией неявного вида в отдельно заданной точке.

В работах [6-10] отражены принципы работы метода функционально-воксельного моделирования (ФВ-метод), который базируется на построении локальной функции, имеющей угловую метрику в каждой точке $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ на задаваемой области:

$$\cos\alpha_1 x_1 + \cos\alpha_2 x_2 + \dots + \cos\alpha_{n-1} x_{n-1} + \cos\alpha_n = 0. \quad (1)$$

Организация компьютерного хранения угловых характеристик, именуемых в ФВ-методе локальными геометрическими характеристиками, осуществляется через преобразования в числовое значение цвета, что даёт возможность получить изображения локальных геометрических характеристик (М-образы) на заданной области, а также собрать их обратным преобразованием в косинусы для получения локальной функции в рассматриваемой точке М-образа. Например, М-образы для уравнения круга

$$z = r^2 - x^2 - y^2 \text{ или } r^2 - x^2 - y^2 - z = 0 \quad (2)$$

представимы локальной функцией $\cos\alpha x + \cos\beta y + \cos\gamma z + \cos\delta = 0$. М-образы, описывающие области задания функции $x = [-r; r], y = [-r; r]$, показаны на рисунке 1.

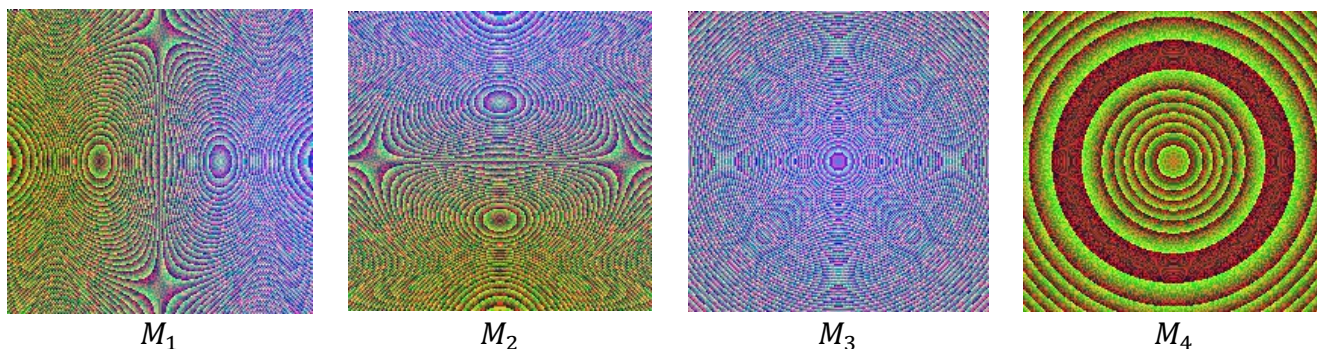


Рис.1. М-образы функции круга в RGB-формате, отображающем 16777215 оттенков цвета

На рисунке 2 демонстрируется полутоновое изображение локальных геометрических характеристик для визуальной оценки, но с потерей точности представления до 255 оттенков серого.

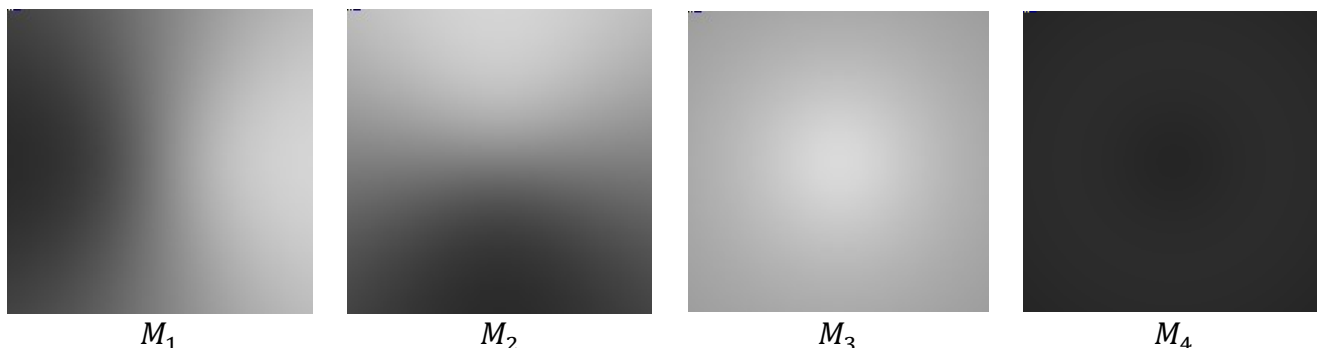


Рис.2. М-образы функции круга в монохромном формате, отображающем 256 оттенков цвета

Основным преимуществом локальной функции является её простое представление суммой аргументов, умноженных на локальные геометрические характеристики, что позволяет легко выражать искомые значения через остальные аргументы, обеспечивая простотой вычислений для выбранной на заданной области точки. Например:

$$z = -\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} x - \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} y - \frac{\cos\delta}{\cos\gamma}. \quad (3)$$

На рисунке 3 приведены монохромные изображения области рассчитанных значений по аргументу z . Рисунок 3.а) отображает нормированные z -значения функции, а на рисунке 3.б) синим цветом выделена область z -значений с отрицательным знаком.

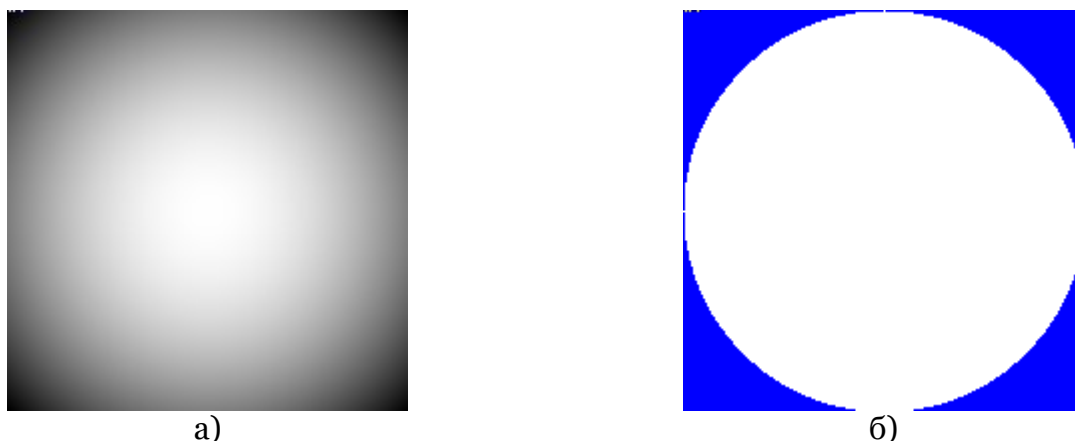


Рис. 3. Значения z , распределенные по заданной области функции (2):
а) значения нормированы от белого цвета к чёрному, б) знак z -значения функции

На основе ФВ-метода реализовано множество компьютерных решений для задач в различных направлениях математического моделирования [3-7], приводимых к наглядному, неограниченному в размерности аргументов решению.

Однако, предложенный ФВ-метод в своей основе базируется на дискретном представлении данных (М-образов), полученных линейной аппроксимацией тремя соседними точками налагаемой сетки, что очевидно приводит к ограничениям в точности представления данных, а также к ограниченной области для вычислений.

1. Дифференциальное представление локальной функции

Попробуем избавиться от этих ограничений применив дифференциальные принципы организации локальной функции. Рассмотрим снова пример локальной функции, заданной неявным уравнением и описывающей двухмерную область аргументов xOy , где z можно отнести к её значению:

$$\cos\alpha x + \cos\beta y + \cos\gamma z + \cos\delta = 0. \quad (4)$$

Приведём уравнение (4) к дифференциальному виду:

$$-\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}x - \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}y - \frac{\cos\delta}{\cos\gamma} = \frac{\cos\gamma}{\cos\gamma}z. \quad (5)$$

По своей сути, формулировка (5) приводит к следующему выражению:

$$-\frac{\partial z}{\partial x}x - \frac{\partial z}{\partial y}y - \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial z}z. \quad (6)$$

откуда следует, что $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$, $\partial z/\partial t$ – аналитически заданные поверхности производных, а отношение при аргументе z равно единице. Разберёмся на примере с аналитическим описанием окружности как приводится дискретная локальная функция, определённая для каждой точки задаваемой области к общему аналитическому виду.

За исходное уравнение описания окружности принимаем уравнение (2). Дифференцируя его по трём осям, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial z}{\partial z} = 1. \quad (7)$$

На основе равенства локальной функции (6) четвёртая по порядку производная выражается:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{\partial z}{\partial x}x - \frac{\partial z}{\partial y}y + \frac{\partial z}{\partial z}z = +2x \cdot x + 2y \cdot y + (r^2 - x^2 - y^2). \quad (8)$$

Получим локальные геометрические характеристики умножив все четыре дифференциальные компоненты (производные) на третью компоненту $\partial z/\partial z$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial z} x + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial z} y + \frac{\partial z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z} z + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

и затем, нормируя по длине однородного вектора нормали, получим косинусные значения компонент:

$$N = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} \quad (10)$$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial z}}{N}, \cos \beta = \frac{\frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial z}}{N}, \cos \gamma = \frac{1}{N}, \cos \delta = \frac{\frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial z}}{N}.$$

На рисунке 4 демонстрируются М-образы, отображающие локальные геометрические характеристики на той же области задания уравнения окружности (2), что и изображённые на рисунке 1, но полученные без выполнения линейной аппроксимации [6-10]. Если сравнивать оба изображения, то видим некоторую схожесть, с очевидным отличием цветовых узоров. Это объясняется повышенной точностью полученного представления по сравнению с применяемой в ФВ-методе сеточной аппроксимацией.

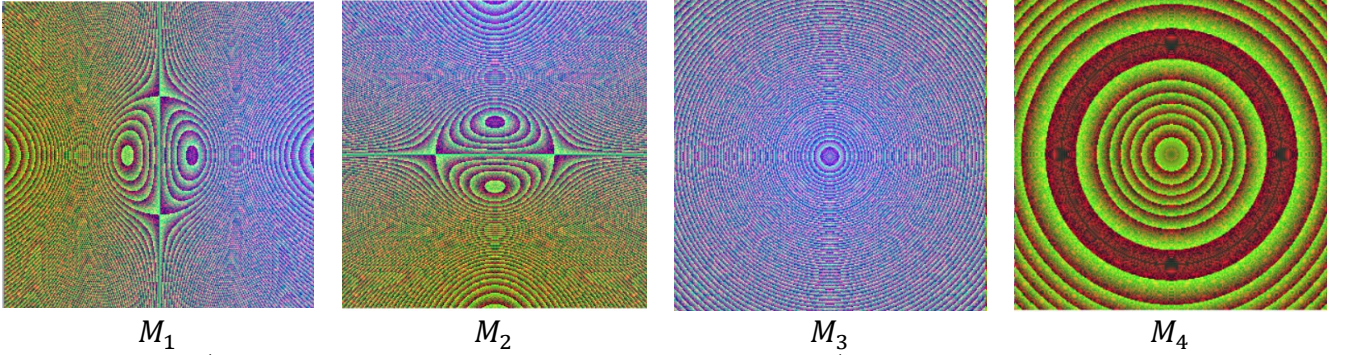


Рис.4. М-образы функции круга в RGB-формате, отображающем 16777215 оттенков цвета

Зато рисунок 5 вполне сопоставим с рисунком 2, поскольку для изображения применялись всего 256 градаций тона, т.е. более грубое представление.

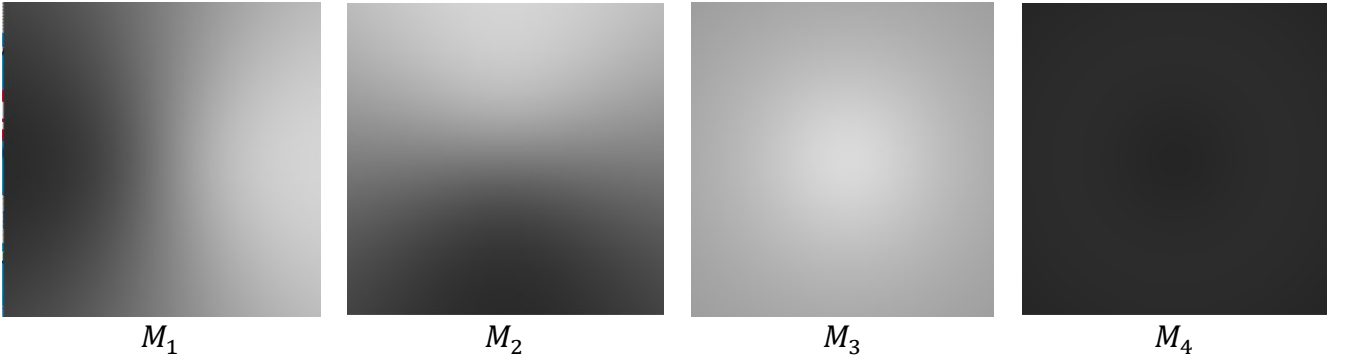


Рис. 5. М-образы функции круга в монохромном формате, отображающем 256 оттенков цвета

Учитывая, что дифференцированию по осям подлежит большинство аналитических функций, описывающих объекты аналитической геометрии, можно с уверенностью говорить о состоятельности предложенного подхода.

Такое представление значительно расширяет рамки применения локальной функции со всеми её замечательными свойствами. Во-первых, однозначно увеличивается точность локальных геометрических характеристик. Во-вторых, приходим к самому компактному описанию локальных геометрических характеристик аналитическими

выражениями, что позволяет отойти от проблемы ограничений, возникающих с задаваемой заранее областью аргументов и количеством градаций цветовой палитры, что расширяет её применимость в многообъектном моделировании.

Конечно, можно возразить, что, к примеру, та же R-функция сложно поддается дифференцированию и переход к представлению геометрии локальной функцией может, наоборот, усложнить расчёты. Попробуем решить эту задачу используя наработанный аппарат локальной геометрии, где R-функция адаптирована вычислению локальных характеристик [10].

2. Пример геометризации области для цилиндра

Для начала, используя полученный опыт моделирования локальной функции для круга, R-функционально промоделируем трёхмерную фигуру цилиндра высотой $2h$ в виде локальной функции трёхмерной области:

$$\cos \alpha x + \cos \beta y + \cos \gamma z + \cos \delta u + \cos \tau = 0. \quad (11)$$

Для этого используем пересечение областей функций, описывающих две пространственных фигуры u_1 и u_2 : бесконечной горизонтальной полосы высотой $2h$ и бесконечного вертикального цилиндра с радиусом r .

$$u_1 = h^2 - z^2 \text{ и } u_2 = r^2 - x^2 - y^2. \quad (12)$$

Для получения аналитически описанной функции неявного вида для цилиндра обычно применяется R-пересечение:

$$u = u_1 + u_2 - \sqrt{u_1^2 + u_2^2}. \quad (13)$$

Частными производными фигура бесконечного цилиндра описывается аналогично уравнению окружности, влияние координаты z отсутствует:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}x - \frac{\partial u}{\partial y}y + \frac{\partial u}{\partial u}u, \quad (14)$$

$$u = r^2 - x^2 - y^2.$$

М-образы для данного примера, отображающие область $x = [-r; r], y = [-r; r], z = 0$, демонстрируются на рисунках 6 и 7.

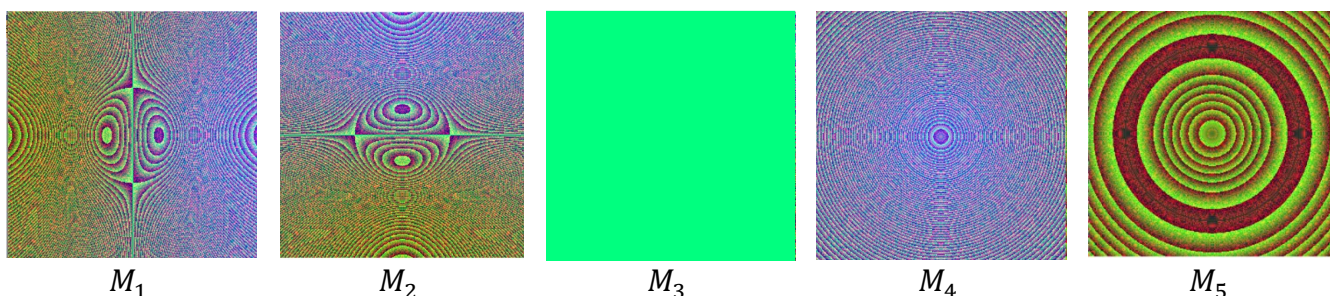


Рис.6. М-образы функции бесконечного цилиндра в RGB-формате, отображающем 16777215 оттенков цвета

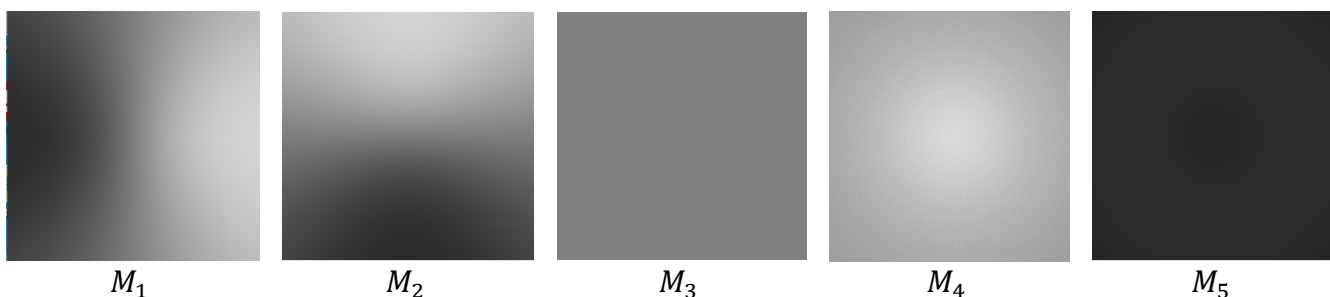


Рис.7. М-образы функции бесконечного цилиндра в монохромном формате, отображающем 256 оттенков цвета

Полоса ограничений по оси Oz высотой $2h$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -2z, \quad \frac{\partial u}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial z}z + \frac{\partial u}{\partial u}u, \quad u = h^2 - z^2. \quad (15)$$

М-образы к данному примеру для области $x = [-2h; 2h], y = 0, z = [-2h; 2h]$ показаны на рисунках 8 и 9.

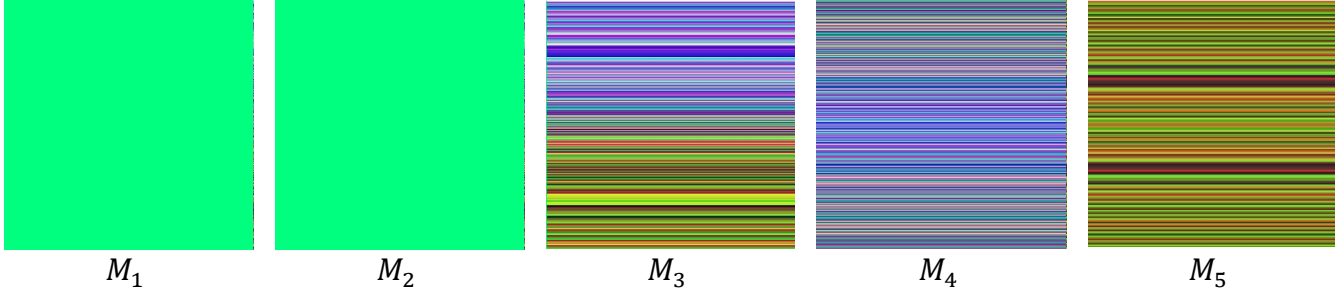


Рис.8. М-образы функции горизонтальной полосы в RGB-формате, отображающем 16777215 оттенков цвета

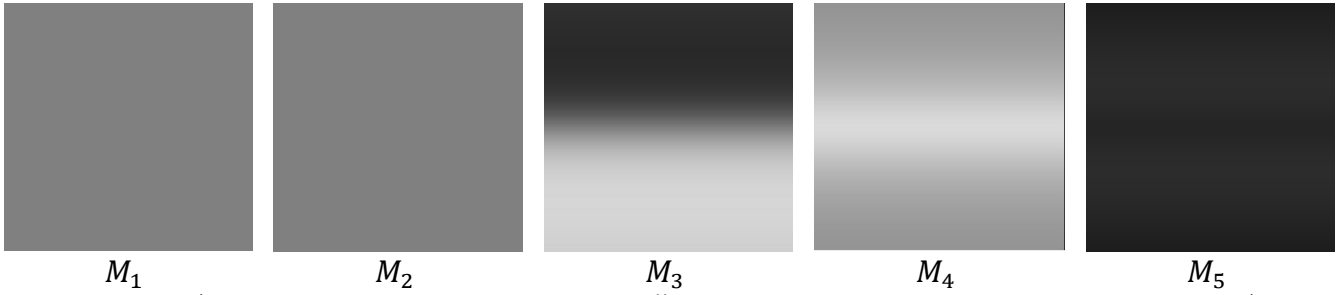


Рис.9. М-образы функции горизонтальной полосы в монохромном формате, отображающем 256 оттенков цвета

Применим формулу, указанную в работе [8], для R-пересечения дифференциалов. Для удобства сократим запись дифференциалов до принятых обозначений и переведем в локальные геометрические характеристики:

$$N = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial u}\right)^2}, \quad (16)$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial u}}{N}, \cos \alpha_2 = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial u}}{N}, \cos \alpha_3 = \frac{\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial u}}{N}, \cos \alpha_4 = \frac{1}{N}, \cos \alpha_5 = \frac{\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial u}}{N}.$$

$$l_1^{(1)} = \frac{\cos^{(1)} \alpha_1}{\cos^{(1)} \alpha_4}, l_2^{(1)} = \frac{\cos^{(1)} \alpha_2}{\cos^{(1)} \alpha_4}, l_3^{(1)} = \frac{\cos^{(1)} \alpha_3}{\cos^{(1)} \alpha_4}, l_5^{(1)} = \frac{\cos^{(1)} \alpha_5}{\cos^{(1)} \alpha_4}, \quad (17)$$

$$l_1^{(2)} = \frac{\cos^{(2)} \alpha_1}{\cos^{(2)} \alpha_4}, l_2^{(2)} = \frac{\cos^{(2)} \alpha_2}{\cos^{(2)} \alpha_4}, l_3^{(2)} = \frac{\cos^{(2)} \alpha_3}{\cos^{(2)} \alpha_4}, l_5^{(2)} = \frac{\cos^{(2)} \alpha_5}{\cos^{(2)} \alpha_4},$$

$$u^{(1)} = -l_1^{(1)}x - l_2^{(1)}y - l_3^{(1)}z - l_5^{(1)},$$

$$u^{(2)} = -l_1^{(2)}x - l_2^{(2)}y - l_3^{(2)}z - l_5^{(2)}.$$

$$l_i^{(cyl)} = l_i^{(1)} + l_i^{(2)} - \left(\frac{l_i^{(1)}u^{(1)} + l_i^{(2)}u^{(2)}}{\sqrt{(u^{(1)})^2 + (u^{(2)})^2}} \right), \quad l_4^{(1,2)} = 1, \quad (18)$$

$$i = 1, 2, 3, 5.$$

На рисунке 10 демонстрируются М-образы плоского сечения цилиндра в плоскости xOz в цветном RGB представлении для хранения на компьютере.

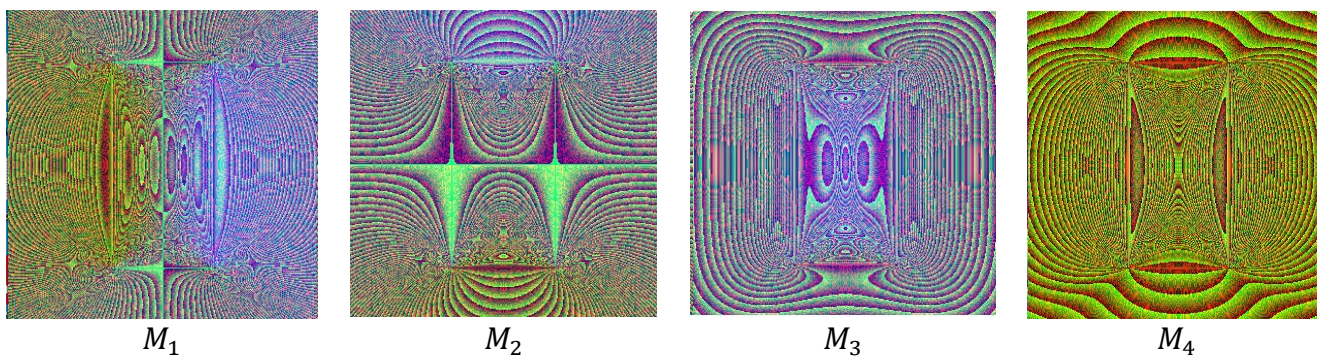


Рис.10. М-образы сечения цилиндра в RGB-формате, отображающем 16777215 оттенков цвета

Для наглядной оценки человеком на рисунке 11 приводятся М-образы в монохромном формате.

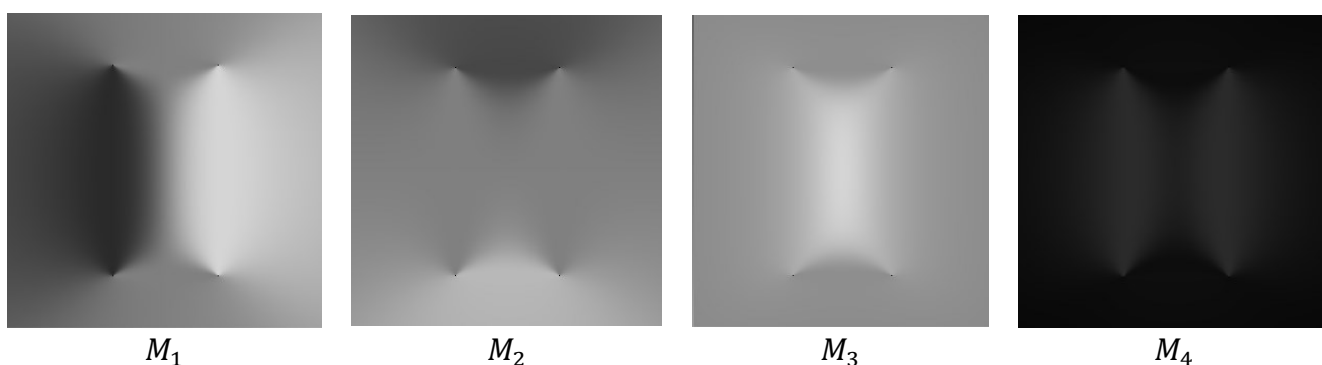


Рис.11. М-образы сечения цилиндра в монохромном формате, отображающем 256 оттенков цвета

Выводы

Представленный принцип дискретизации непрерывного пространства локальными непрерывными функциями позволяет формулировать дальнейшие задачи, связанные с аналитическим описанием геометрии сложной техногенной среды функциями неявного вида. Идея сводится к выявлению группы основных дифференциалов, позволяющих описать на локальном уровне геометрию пространства функции любой размерности и сложности формулируемого объекта, что позволяет задуматься о расширении инструментальных средств современного графического ядра, приводя их к многомерному представлению для реализации задач проектирования и управления.

Благодарности

Исследование выполнено в рамках научной программы национального центра физики и математики, направление №9 «Искусственный интеллект и большие данные в технических, промышленных, природных и социальных системах».

Список литературы

1. Каледин, Валерий Олегович. Теория R-функций : учебное пособие для высших учебных заведений по направлению Прикладная математика и информатика : рек. УМО вузов РФ / В. О. Каледин, Е. В. Решетникова, В. Б. Гридчина ; Кемеровский гос. ун-т, Новокузнецкий ин-т (фил.). - 2-е изд., перераб. и доп. - Новокузнецк : НФИ КемГУ, 2017. - 119 с.

2. R.A. Kolyada, K.V. Maksymenko-Sheiko, T.I. Sheiko R-Functions Method in the Mathematical Modeling of Convective Heat Exchange in an Octahedral Fuel Assembly with 37 Fuel Elements // Journal of Mathematical Sciences 238, 2019. – P.154 -164.
3. B. Uspensky, K. Avramov, I. Derevianko, K. Maksymenko-Sheiko Vibrations of cylindrical sandwich shell with fused deposition processed honeycomb core and carbon nanotubes reinforced composite faces sheets // Journal of Vibration Engineering & Technologies 12 (2), 2024. – P. 2003-2023.
4. K.V. Maksymenko-Sheyko, T.I. Sheyko Mathematical modeling of geometric fractals using R-functions // Cybernetics and Systems Analysis 48, 2012. – P. 614-620.
5. Ю.С. Литвинова, К.В. Максименко-Шейко, Т.И. Шейко Математическое и компьютерное моделирование строительных конструкций на основе R-функций // Проблемы машиностроения, №17 (3), 2014. – С. 12-18.
6. Толок А.В. Функционально-воксельный метод в компьютерном моделировании. М.: Физматлит, 2016. – 112 с.
7. Толок А.В. Локальная компьютерная геометрия. Учебное пособие. М.: Ай Пи Ар Медиа, 2022. – 147 с.
8. Толок А.В., Толок Н.Б. Функционально-воксельное моделирование задачи Коши // Научная визуализация. 2024. Т. 16, № 1. С. 105-111.
9. Толок А.В., Толок Н.Б. Моделирование решения обыкновенного дифференциального уравнения функционально-воксельным методом // Научная визуализация. 2024. Т. 16, № 3. С. 37-47.
10. Толок А.В., Толок Н.Б. Функционально-воксельное моделирование алгоритма движения к цели на основе г-функций // Проблемы управления. 2024. № 5. С. 49-56.

Principles of Organization of Continuity in Discrete Geometrized Space

A.V. Tolok¹, N.B. Tolok²

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russia

¹ ORCID: 0000-0002-7257-9029, tolok_61@mail.ru

² ORCID: 0000-0002-5511-4852, nat_tolok@mail.ru

Abstract

The paper considers the principle of analytical transition to a local function at points on the domain of an implicit function defining a geometric object. Herewith, a transition to partial derivatives is provided to obtain a general form of an implicit local function describing the local geometry for any single point in the object domain. On the analogy of R-functional modeling, a mathematical apparatus for union/intersecting local geometric characteristics of a local function at a single point is provided to construct a discrete region of a complex geometric object.

An example of the intersection of two functions on a defined domain of arguments demonstrates the obtaining of a discretely geometrized three-dimensional manifold for describing a cylinder.

The proposed work is the continued development of method of the Functional Voxel Modeling which offers an analytical structure for the discrete-continuous description of complex geometric objects instead of the means of linear approximation currently used in this method.

Keywords: domain of definition of the function, Functional Voxel Method (FV-method), Functional Voxel modeling, partial derivatives, local geometric characteristics, local function, R-functional modeling, discrete-continuous domain.

References

1. Kaledin V.O., Reshetnikova E.V., Gridchina V.B. Theory of R-functions: study guide for Higher Education Institutions in the field of Applied Mathematics and Computer Science. Kemerovo State University, Novokuznetsk Institute. 2017. - 119 pp.
2. Kolyada R.A., Maximenko-Sheiko K.V., Sheiko T.I. R-Functions Method in the Mathematical Modeling of Convective Heat Exchange in an Octahedral Fuel Assembly with 37 Fuel Elements // Journal of Mathematical Sciences 238, 2019. – P.154 -164.
3. Uspensky B., Avramov K., Derevianko I., Maksymenko-Sheiko K. Vibrations of cylindrical sandwich shell with fused deposition processed honeycomb core and carbon nanotubes reinforced composite faces sheets // Journal of Vibration Engineering & Technologies 12 (2), 2024. – P. 2003-2023.
4. Maximenko-Sheiko K.V., Sheiko T.I. Mathematical modeling of geometric fractals using R-functions // Cybernetics and Systems Analysis 48, 2012. – P. 614-620.
5. Litvinova J.S., Maximenko-Sheiko K.V., Sheiko T.I. Mathematical and computer modeling of construction structures based on R-functions [In Russian]. Problems of mechanical engineering, №17 (3), 2014. – P. 12-18.
6. Tolok, A.V. Functional-voxel method in computer modeling [In Russian]. Moscow: Fizmatlit. 2016. 112 p.

7. Tolok, A.V. and Tolok, N.B. Local computer geometry [In Russian]. Moscow: IPR Media, 2025. 228 p.
8. Tolok, A.V. and Tolok, N.B. Functional-Voxel Modeling of The Cauchy Problem // Scientific Visualization, 2024, volume 16, number 1, pages 105 - 111, DOI: 10.26583/sv.16.1.09.
9. Tolok, A.V. and Tolok, N.B., Modeling the Solution of an Ordinary Differential Equation by the Functional Voxel Method // Scientific Visualization, 2024, volume 16, number 3, pages 37 - 47, DOI: 10.26583/sv.16.3.04.
10. Tolok, A.V. and Tolok, N.B., Functional Voxel Modeling of a Path Planning Algorithm to a Target Based on R-Functions. Control Sciences 5, 41–47 (2024).